

# Schubverformungen von Holztragwerken

Schubverformungen werden bei der Berechnung von Stabtragwerken häufig vernachlässigt, da ihr Anteil an der Gesamtverformung gering ist. Gerade im Holzbau sind die Schubverformungen aufgrund des verhältnismäßig geringen Schubmoduls von Holz jedoch oft größer als vermutet. Dieser Aufsatz stellt Hilfsmittel für die Beurteilung und Berechnung der Schubverformungen bei statisch bestimmten und unbestimmten Systemen dar.

## 1 Motivation

In der klassischen Balkentheorie werden Schubverformungen vernachlässigt (Annahme von Bernoulli). Dies ist bis heute in der Baustatik gängige Praxis, selbst bei Holzbalken mit naturgemäß geringem Schubmodul. Die Normen geben den Schubmodul zwar an, überlassen jedoch die Entscheidung, ob Schubverformungen berücksichtigt werden, im Einzelfall dem Ingenieur.

Die Grundlagen für die Berechnung von Schubverformungen sind seit rund 100 Jahren bekannt (Timoshenko [1]). Allerdings existieren nur wenige allgemein zugängliche Quellen, die dem Ingenieur praktische Berechnungshilfsmittel an die Hand geben. Viele in der Praxis eingesetzte Programme können die Schubverformung zwar optional berücksichtigen, der Ingenieur braucht jedoch das Hintergrundwissen und auch die Möglichkeit der Kontrolle durch eine vergleichende Handrechnung. Aus diesem Grund stellt der Aufsatz einfache Rechenmethoden und Hilfsmittel für die Praxis vor.

## 2 Schubverformungen von Balken

### 2.1 Grundlagen

Die Grundlagen für die Berechnung von Schubverformungen wurden in [2] dargestellt und sollen hier nicht wiederholt werden. Die nachstehenden Ausführungen gehen von der Methode der Partialdurchsenkungen aus. Dabei werden bei linearen statischen Berechnungen die Verformungsanteile aus Biegung und Schub getrennt ermittelt und anschließend superponiert (Bild 1).

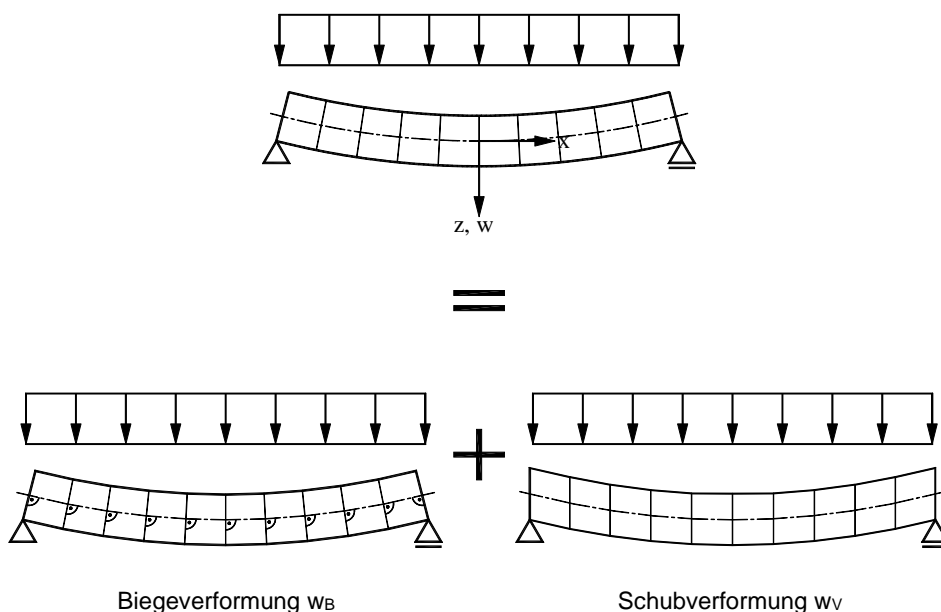


Bild 1. Superposition von Biege- und Schubverformung.

Im Folgenden werden nur die Schubverformungsanteile  $w_V(x)$  an der Gesamtdurchbiegung betrachtet.

## 2.2 Durchbiegung infolge Schub

Die Schubverformung bewirkt eine s-förmige Verwölbung des Querschnitts. Da bei der Herleitung der Grundgleichungen von einem ebenen Querschnitt ausgegangen wird, ist die Einführung eines Korrekturfaktors  $\kappa_V$  erforderlich, der von der Querschnittsform abhängig ist [2]. Die korrigierte Schubsteifigkeit eines Balkens ist demnach  $GA/\kappa_V$  mit  $\kappa_V = 1,2$  für Rechteckquerschnitte.

Die Gleichung für die Schubverformung ergibt sich durch Integration von  $w_V'' = \gamma' = \frac{V'}{GA/\kappa_V}$  :

$$w_V(x) = \frac{M(x)}{GA/\kappa_V} + C_1x + C_2$$

Die Schubverformungslinie entspricht somit dem Momentenverlauf, in manchen Fällen überlagert mit einem konstanten ( $C_2$ ) oder linearen ( $C_1x$ ) Anteil. Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  ergeben sich aus den Randbedingungen.

## 2.3 Schubverformungen bei Einfeld- und Durchlaufträgern

Für die Schubverformungen spielt der Drehwinkel  $\varphi$  keine Rolle. Daher ist die Behinderung einer Verdrehung  $\varphi$  am Stabende (Einspannung) oder eine Durchlaufwirkung ohne Einfluss auf die Größe der Schubverformungen. Wenn ein Balkenabschnitt der Länge  $L$  am Anfang und am Ende gelagert ist, kann die Schubverformungslinie am Ersatz-Einfeldträger ermittelt werden. Die Lasten werden auf einen gelenkig gelagerten Einfeldträger der Länge  $L$  als Ersatzsystem aufgebracht. Die Momentenlinie  $M_{EFT}(x)$  ist affin zu der Schubverformungslinie des Balkenabschnitts (Bild 2).

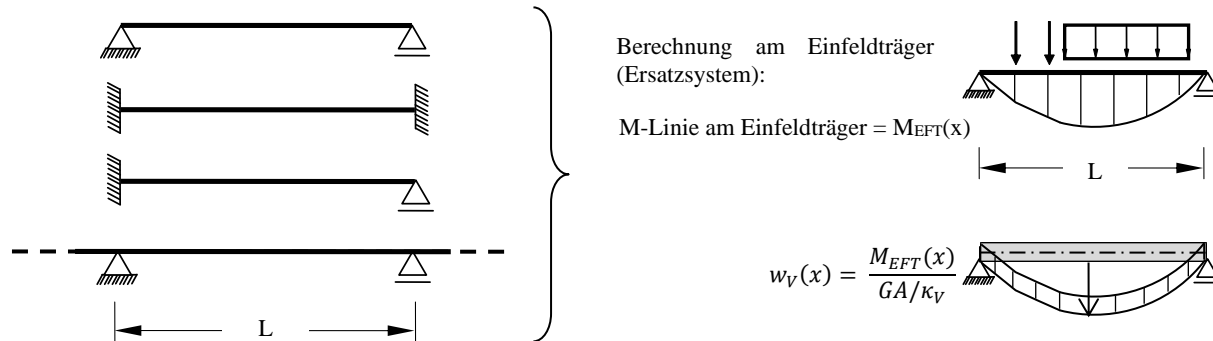


Bild 2. Berechnung der Schubverformung am Einfeldträger-Ersatzsystem [2]

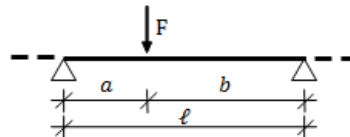
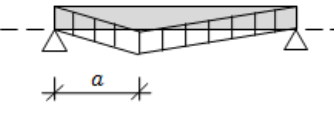
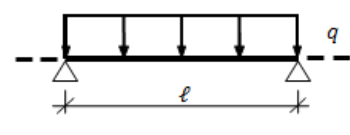
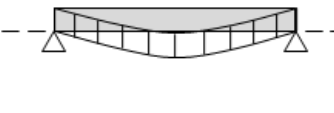
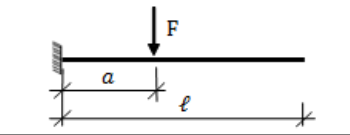
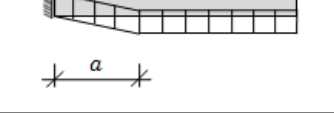
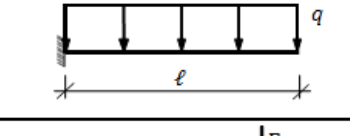

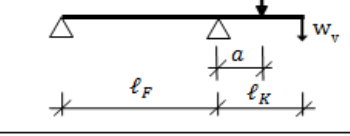
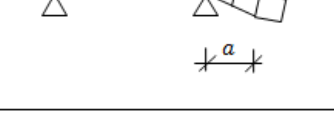
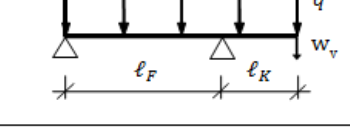
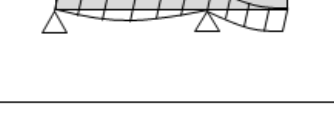
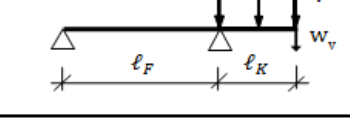

Zunächst ist es verwunderlich, dass die Darstellung in Bild 2 auch statisch unbestimmte Systeme beinhaltet, deren Schnittgrößenverteilung von der Schubsteifigkeit abhängt. Das Ergebnis der Schubverformung ist jedoch aufgrund der Randbedingungen  $w(x=0)$  und  $w(x=L)$  von den Stützmomenten unabhängig. Dagegen hängt die Biegeverformung sehr wohl von der Schnittgrößenverteilung und damit indirekt auch von der Schubsteifigkeit ab (vgl. Abschnitt 4).

## 3 Anwendung bei statisch bestimmten Systemen

### 3.1 Berechnungshilfsmittel

Tabelle 1 zeigt die Formeln sowie die Form der Schubverformung für gängige Lastfälle statisch bestimmter Systeme.

Tabelle 1. Formeln zur Berechnung der maximalen Schubverformung für Standardfälle [2]

System und Lastbild	Maximale Durchbiegung aus Schub $w_{v,max}$	Schub-Verformungslinie
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{F \cdot a \cdot b}{l \cdot GA}$ für $a \leq b$	
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot GA}$	
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{F \cdot a}{GA}$	
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot GA}$	
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{F \cdot a}{GA} \cdot \left(1 + \frac{l_K}{l_F}\right)$	
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{q \cdot l_K^2}{2 \cdot GA} \cdot \left(1 + \frac{l_K}{l_F}\right)$	
	$w_v = \kappa_V \cdot \frac{q \cdot l_K^2}{2 \cdot GA} \cdot \left(1 + \frac{l_K}{l_F}\right)$	

### 3.2 Anwendungsbeispiel

Als Beispiel dient ein einseitig auskragender Einfeldträger, wie er oftmals im Hallenbau verwendet wird, um im Außenbereich eine Lagerfläche zu überdachen (Bild 3). Die Berechnung wird für einen Rechteckvollquerschnitt aus Brettschichtholz der Festigkeitsklasse GL 28c mit den Abmessungen 16/64cm auf Basis der Kennwerte nach DIN 1052:2008 durchgeführt.

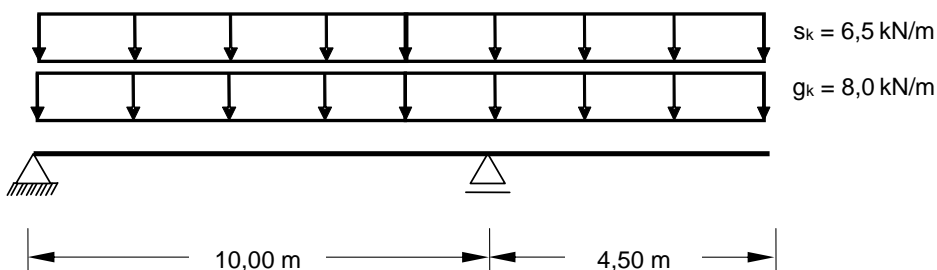


Bild 3. Statisches System und Belastung der Beispielrechnung

Nach Tabelle 1 ergibt sich die Schubverformung am Kragarm mit

$$w_{v,Krag} = 1,2 \frac{(6,5 + 8,0) \frac{kN}{m} \cdot (4,5m)^2}{2 \cdot 72,0 \frac{kN}{cm^2} (16cm \cdot 64cm)} \left(1 + \frac{4,5m}{10,0m}\right) = 3,5 \cdot 10^{-3}m$$

**Tabelle 2** Ergebnisse der Beispielrechnung

$w_{B,Krag}$	$w_{V,Krag}$	$w_{inst,Krag}$	$w_{fin,Krag}$	$w_V/w_{ges}$
5,1 mm	3,5 mm	8,6 mm	12,4 mm	40%

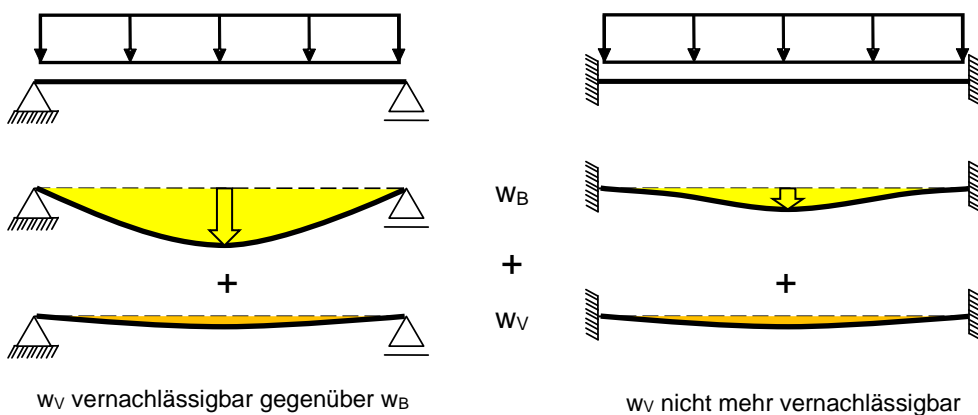
Die weiteren Ergebnisse können Tabelle 2 entnommen werden. Sie zeigen, dass etwa 40% der Gesamtverformung auf Schubverformungen entfallen. Dies ist auf den geringen Schubmodul zurückzuführen, der nach DIN 1052:2008 um den Faktor 17,5 geringer als der Elastizitätsmodul des verwendeten Brett-schichtholzes ist. Nach der Produktnorm DIN EN 14080:2013 ist dieses Verhältnis mit 19,2 noch ungünstiger. Zudem entsteht aufgrund der großen Höhe des Trägers und der vergleichsweise kurzen Auskragung ein ungünstiges l/h-Verhältnis, das ebenfalls Einfluss auf die Verteilung der Verformungen hat.

Neben den elastischen Anfangsverformungen bewirkt das Kriechen des Brett-schichtholzträgers weitere Verformungen, die für den Nachweis im Endzustand zu berücksichtigen sind. Die Langzeitverformungen werden üblicherweise auf Basis eines einheitlichen Kriechbeiwertes  $k_{def}$  für Biegung und Schub ermittelt. Im Beispiel ergeben sich aus den Eigengewichtslasten zusätzliche Kriechverformungen von 3,8 mm.

## 4 Anwendung bei statisch unbestimmten Systemen

### 4.1 Besonderheiten statisch unbestimmter Systeme

Auf statisch unbestimmte Systeme hat die Verformung aus Querkraft tendenziell einen größeren Einfluss als auf statisch bestimmte Systeme. Beispielhaft sei hier der beidseitig eingespannte Einfeldträger genannt, bei dem die Einspannung eine starke Reduzierung der Biegeverformungen zur Folge hat. Da die Schubverformung jedoch identisch zum gelenkig gelagerten Träger ist, nimmt ihr prozentualer Anteil an der Gesamtverformung entsprechend zu.



**Bild 4.** Steigender Einfluss der Schubverformungen bei statisch unbestimmten Systemen.

Im Gegensatz zu statisch bestimmten Systemen, bei denen die Verteilung der Auflager- und Schnittgrößen allein aus dem Gleichgewicht bestimmt ist, beeinflussen die Schubverformungen bei statisch unbestimmten Systemen den Momentenverlauf und damit indirekt auch die Biegeverformungen.

Bei einer EDV-gestützten Berechnung wird dieser Effekt automatisch berücksichtigt, wenn schubweiche Elemente verwendet werden. In der Regel führt dies zu einer Abminderung der Stütz-momente, was sich auf die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit positiv auswirken kann. Im Gegenzug vergrößern sich die Biegeverformungen, der Träger verliert durch die Schubweichheit quasi einen Teil seiner

Durchlaufwirkung.

## 4.2 Der einseitig eingespannte Träger

Der einseitig eingespannte Einfeldträger entspricht in der Tragwirkung einem Zweifeldträger unter Volllast. Die Einspannung führt bekanntermaßen zu einer sehr ungleichmäßigen Lastabtragung (Bild 5). Für dieses System können exakte Formeln hergeleitet werden, die den Effekt der Schnittkraftumlagerung infolge Schubverformung beinhalten:

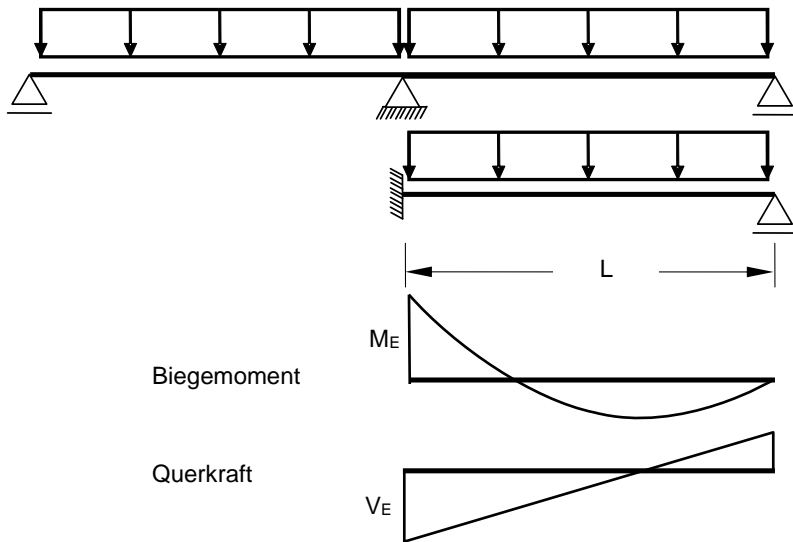
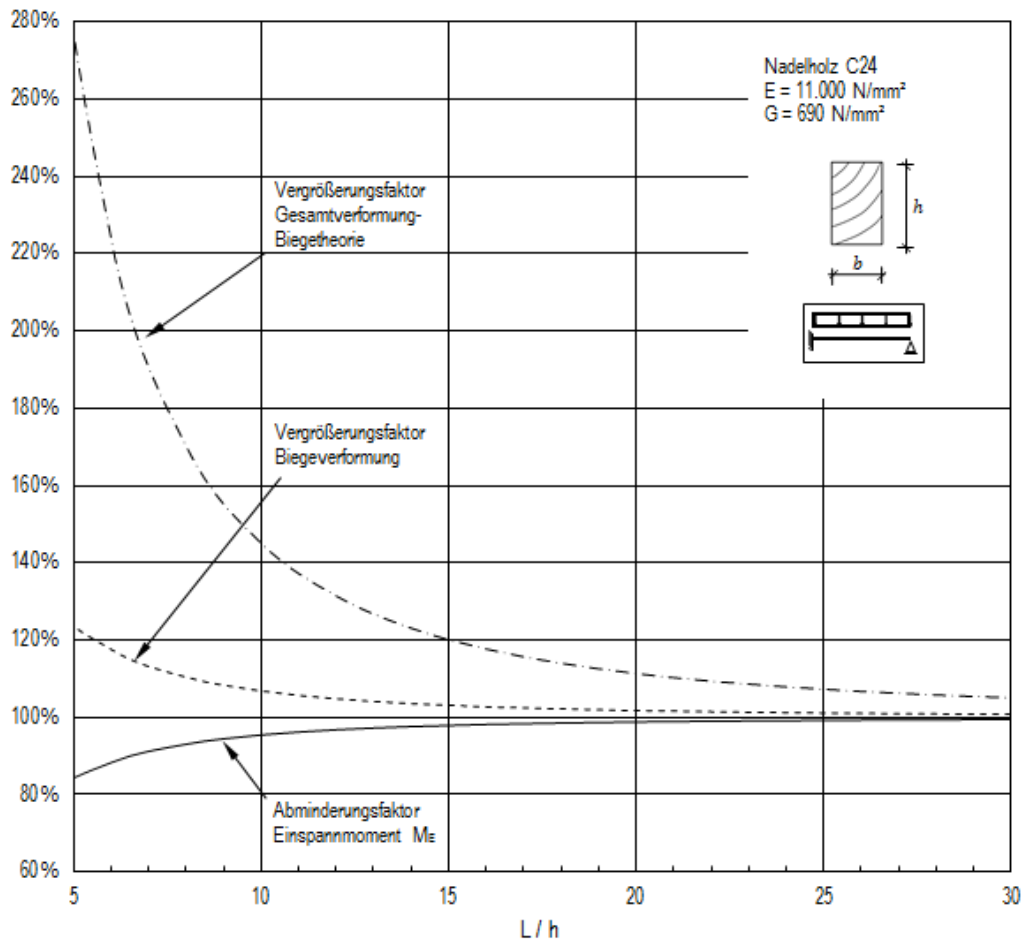


Bild 5. Schnittgrößen am einseitig eingespannten Träger bzw. am Zweifeldträger unter Volllast

Tabelle 3: Formeln für den einseitig eingespannten Träger nach Bild 4

	Ohne Schubverformung	Mit Schubverformung	Ober-/Untergrenze bei Grenzbe- trachtungen für EI:GA
$M_E$	$-\frac{ql^2}{8}$	$-\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3EI}{l^2 \cdot GA/\kappa_V}}$	$-\frac{ql^2}{8} \leq M_E \leq 0$
$V_E$	$0,625ql$	$\frac{ql}{2} + \frac{ql}{8 + \frac{24EI}{l^2 \cdot GA/\kappa_V}}$	$0,5ql \leq V_E \leq 0,625ql$
$w_{B,mitte}$	$\frac{2}{384} \frac{ql^4}{EI}$	$\frac{ql^4}{384EI} \left( 5 - \frac{3}{1 + \frac{3EI}{l^2 \cdot GA/\kappa_V}} \right)$	$\frac{2}{384} \frac{ql^4}{EI} \leq w_{B,mitte} \leq \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$
$w_{B,max}$	$\overset{!R}{\frac{2}{369}} \frac{ql^4}{EI}$	/	/
$w_{V,max}$	/	$\frac{ql^2}{8 \cdot GA/\kappa_V}$	/

Für einen Rechteckbalken aus Nadelholz sind diese Zusammenhänge in Bild 6 ausgewertet:



**Bild 6.** Einfluss der Schlankheit beim einseitig eingespannten Träger mit Schubverformungen.

### 4.3 Hilfsmittel für statisch unbestimmte Systeme

Um zu entscheiden, ob die Verformungen aus Schub bei der Verformungsberechnung zu berücksichtigen sind, kann anhand von Bild 7 der Anteil der Schub- an den Gesamtverformungen für ausgewählte Systeme in Abhängigkeit der Schlankheit ermittelt werden.

Es ist zu beachten, dass für den Rechteckquerschnitt aus Vollholz das Verhältnis von Schub- zu Elastizitätsmodul der Festigkeitsklasse C24 zugrunde gelegt wurde. Insbesondere Brett- und Furnierschichthölzer haben ein ungünstigeres G/E-Verhältnis, sodass der Schubeinfluss größer ist als der abgelesene Wert.

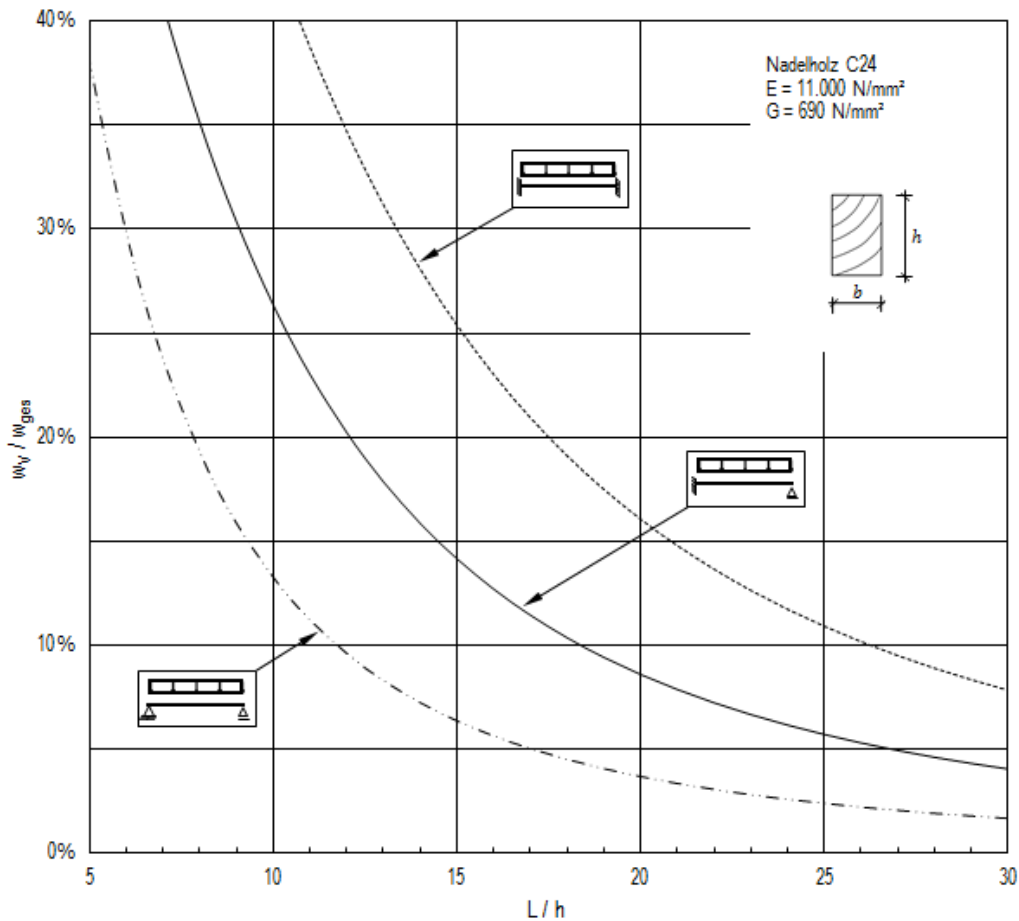


Bild 7. Anteil der Schubverformungen an der Gesamtverformung für Rechteckquerschnitte aus Holz bei ausgewählten statisch unbestimmten Systemen.

#### 4.4 Beispiel Zweifeldträger

Das nachfolgende Beispiel stellt einen Unterzug mit der maßgebenden Laststellung für die Durchbiegungsberechnung dar:

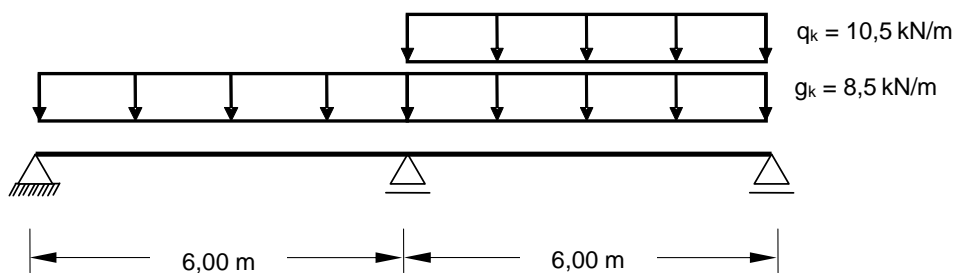


Bild 8. Beispiel Zweifeldträger.

Zunächst erfolgt die Berechnung näherungsweise ohne Berücksichtigung der Momentenumlagerung infolge der Schubverformung:

Brettschichtholz  $200 \times 520$  GL 24h nach DIN EN 14080:2013

$$E_{0,\text{mean}} = 11500 \text{ N/mm}^2 = 1150 \text{ kN/cm}^2$$

$$G_{\text{mean}} = 650 \text{ N/mm}^2 = 65,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$I_y = 20 \cdot 52^3 / 12 = 234347 \text{ cm}^4$$

$$A = 20 \cdot 52 = 1040 \text{ cm}^2$$

$$\text{Biegesteifigkeit } EI = 1150 \cdot 234347 = 2,695 \cdot 10^8 \text{ kNcm}^2$$

Schubsteifigkeit  $GA/\kappa_V = 65 \cdot 1040 / 1,2 = 5,633 \cdot 10^4 \text{ kN}$

Biegeverformungen Durchlaufträger (vgl. Bautabellen)

$$w_{B,G,inst} = 0,0054 \cdot g_k \cdot L^4 / EI = 0,221 \text{ cm}$$

$$w_{B,Q,inst} = 0,0092 \cdot q_k \cdot L^4 / EI = 0,465 \text{ cm}$$

Schubverformungen nach Tab. 1, Zeile 2:

$$w_{V,G,inst} = g_k \cdot L^2 / (8 \cdot GA/\kappa_V) = 0,068 \text{ cm}$$

$$w_{V,Q,inst} = q_k \cdot L^2 / (8 \cdot GA/\kappa_V) = 0,084 \text{ cm}$$

Gesamte elastische Durchbiegung  $w_{inst}$ :

$$w_{inst} = w_{B,inst} + w_{V,inst} = (0,221 + 0,465) + (0,068 + 0,084) = 0,838 \text{ cm}$$

Gesamte finale Durchbiegung  $w_{fin}$ :

$$w_{fin} = w_{G,inst} (1 + k_{def}) + w_{Q,inst} (1 + \psi_2 \cdot k_{def}) = (0,221 + 0,068) \cdot (1 + 0,6) + (0,465 + 0,084) \cdot (1 + 0,3 \cdot 0,6) = 1,11 \text{ cm}$$

Der Schubanteil an den Verformungen beträgt jeweils 19%.

Berücksichtigt man die Schnittkraftumlagerung, also den Einfluss der Schubverformungen auf die Momentenverteilung, so ergeben sich etwas abweichende Werte: Das Stützmoment (ohne Sicherheitsbeiwert) reduziert sich um 4%. Durch diese Umlagerung vergrößern sich die Biegeverformungen für das Eigengewicht um etwa 5%, für die Nutzlast durch die einseitige Laststellung nur um etwa 2,5%. Die Schubverformungen bleiben von der Momentenumlagerung unbeeinflusst, obwohl sich auch die Querkraftverteilung ändert. Insgesamt ergeben sich somit um 2,7% größere Verformungen als nach der oben gezeigten näherungsweise Rechnung. Dies kann in einer Handrechnung vernachlässigt werden. Eine Vernachlässigung der Schubverformungen (19%) wäre in diesem Beispiel jedoch nicht zu vertreten.

## 5 Zusammenfassung

Schubverformungen von Stabtragwerken können in der Mehrzahl der praktischen Anwendungsfälle vernachlässigt werden, da ihr Anteil an den Gesamtverformungen gering ist. Hauptkriterium ist die Schlankheit des Trägers. Bei geringen Schlankheitsgraden erreicht die Schubverformung im Holzbau durch den verhältnismäßig geringen Schubmodul eine relevante Größenordnung, insbesondere bei statisch unbestimmten Systemen.

Es bleibt im Verantwortungsbereich des Ingenieurs zu beurteilen, wann eine Berücksichtigung der Schubverformungen geboten ist. Mit den vorgestellten Hilfsmitteln ist eine einfache Abschätzung des Schubeinflusses auf die Verformungen möglich. Bei statisch unbestimmten Systemen darf bei üblichen Schlankheitsgraden die Auswirkung der Schnittkraftumlagerung auf die Verformungsberechnung vernachlässigt werden.

## Literatur

- [1] *Timoshenko, S. P.*: History of strength of materials. McGraw-Hill. New York 1953.
- [2] *Eierle, B.; Bös, B.*: Schubverformungen von Stabtragwerken in der praktischen Anwendung. Bautechnik 90 (2013), Heft 11, S. 747 – 752.